**1. Descrizione Germogli**

Germogli (*Sprouts* in inglese) è un gioco che si può fare con carta e penna, dalle regole molto semplici ma con proprietà matematiche interessanti. Fu inventato dai matematici John Horton Conway e Michael S. Paterson alla Cambridge University nei primi anni ‘60. Il gioco coinvolse così tanto che, come ricorda Conway, «sembrava che tutti, tra una lezione e l’altra, al caffè o nella pausa per il tè fossero presi dal nuovo gioco». In ogni angolo c’erano gruppi di studenti e professori che analizzavano movimenti e strategie dei Germogli. Piers Anthony, scrittore britannico, ha raccolto la “mania” di Germogli nel suo romanzo di fantascienza *Macroscope*.

«Germogli è un gioco intellettuale che ha avuto una popolarità clandestina con gli scienziati per un certo numero di anni. Le regole sono semplici: tutto ciò che devi fare è connettere i punti». (Anthony, 1969).

**1.1 Scopo e regole**

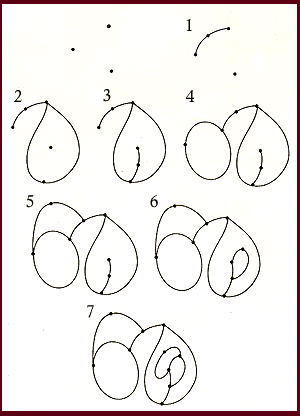
Per questo gioco si tracciano su un foglio alcuni punti. Aumentare il numero di punti iniziali comporta una maggiore difficoltà nell’analisi del gioco; sette o otto sono più che sufficienti per una bella partita, ma nella proposta in classe limiteremo a tre il numero massimo di punti iniziale.   
A turno due giocatori tracciano una linea che unisce fra loro due punti qualsiasi o che ritorna allo stesso punto di partenza, segnando poi sulla linea tracciata un nuovo punto.

Le regole da osservare sono soltanto queste:

1. Ogni linea può avere una forma qualunque, ma non deve intersecare le altre linee già tracciate, né può attraversare i punti in gioco.

2. Da ogni punto non possono partire più di tre linee.

Vince il giocatore che traccia l’ultima linea e che lascia quindi l’avversario bloccato, nell’impossibilità di tracciare nuove linee. Di seguito si riporta un esempio di partita a partire da 3 punti.



Come vedremo, per un piccolo numero di punti si possono schematizzare tutte le mosse possibili e determinare quale giocatore ha una strategia vincente. Si mostra che il secondo giocatore può sempre vincere una partita con uno, due o sei punti di partenza. Il primo giocatore è in vantaggio invece se si comincia con tre, quattro o cinque punti.

Nel 1990, David Applegate, Guy Jacobson e Daniel Sleator utilizzarono il calcolatore con sofisticati algoritmi per spingere l’analisi di Germogli a undici punti. Hanno scoperto che il secondo giocatore vince in partite che partono da sette e otto punti, mentre il primo giocatore vince in partite con nove, dieci o undici punti. Guardando questi numeri sembra esserci un interessante schema. I ricercatori hanno congetturato che il primo giocatore abbia una strategia vincente se il numero di punti iniziali diviso per sei dà come resto tre, quattro o cinque. Quindi, la loro previsione per un gioco che coinvolge dodici punti è una vittoria per il secondo giocatore (il resto nella divisione per 6 è zero). È interessante osservare come giochi di questo tipo possono far emergere modelli inaspettati e ricerche inattese, rendendo la formulazione di una strategia vincente alquanto complicata.

Questo gioco ha anche attirato l’attenzione dei matematici, che lo hanno studiato in termini di teoria dei grafi e topologia. È possibile provare Germogli, ad esempio, su una superficie toroidale o in spazi di dimensioni superiori a due.

**2. Come lavorare in classe in III-IV-V elementare**

**Classi di riferimento**

L’analisi del gioco permette alcune semplici riflessioni adatte per bambini di 8-10 anni.

**Traguardi di apprendimento**

Attraverso questo gioco, lo studente è stimolato a:

- costruire ragionamenti, fondandosi su ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri;

- riconoscere, denominare, descrivere e rappresentare figure (del piano e dello spazio), relazioni e strutture legate all’interpretazione della realtà o a una loro matematizzazione e modellizzazione.

**Discipline coinvolte**

Matematica

**Attività**

**Prima fase** (spiegazione della procedura - consegna)

La prima fase del lavoro è dedicata alla rilettura delle regole in modo da accertarsi che tutti gli allievi abbiano ben compreso lo scopo e le possibili mosse da attuare. Si deve essere certi che l’allievo ha recepito la consegna del docente come regola d’azione, che l’abbia memorizzato ed interiorizzata. Si consiglia di preparare (o far preparare dagli allievi) un cartellone (simile a [regole\_GERMOGLI](regole_GERMOGLI.pdf)) dove è riportato in modo semplice e chiaro tutto ciò che gli allievi devono sapere per poter giocare. Questa fase è particolarmente importante perché permette agli allievi di rifarsi alle regole del gioco in caso di controversia o di necessità di giustificazione di una mossa. Il docente propone una partita tra lui e un allievo, mentre il resto della classe assiste. Sarà cura del docente chiedere per ogni mossa se rientra in una azione possibile oppure no. In seguito cede il suo posto ad un allievo.

In questa fase è bene porre attenzione a ciascuna parola presente nel cartellone delle regole, ad esempio “cosa significa al massimo due linee?”, “Cos’è una linea? E come può essere fatta?”, “Quando due linee si incrociano?”, “È importante la forma della linea?”, “Deve essere retta?”, “Incide il tipo di linea sulla strategia da adottare?”, “Se sì, in quali casi?”, “È importante la posizione del nuovo punto sulla linea?” ecc.

Ogni parola e regola può essere seguita da un approfondimento con esempi e controesempi in modo che siano chiare tutte le possibili mosse da realizzare.

**Seconda fase** (partite a piccoli gruppi)

Si formano gruppi di 3 allievi, dove a rotazione 2 giocano e 1 osserva le mosse attuate, eventualmente annotandosi errori commessi o strategie interessanti.

Si devono giocare almeno 3 partite (ogni allievo gioca con un compagno diverso). In questa fase i ragazzi applicano le regole, prendono decisioni, agiscono, si rendono conto un po’ alla volta che è necessario prestare attenzione a come scegliere e collegare due punti. Il docente gira tra i banchi e si assicura che non ci siano difficoltà.

**Terza fase** (Analisi delle regole)

Dopo aver giocato qualche partita in formato gigante oppure su carta è interessante con i bambini capire bene la motivazione delle singole regole: togliendo o modificando infatti una qualsiasi di queste il gioco cambia notevolmente e a volte perde di significato. Questa attività permette agli allievi ragionamenti del tipo “se non fosse così allora succederebbe …”, preludio ad una impostazione logico-formale che giungerà in livelli scolari più alti. Inoltre mostra come le poche regole (di un gioco in generale) hanno tutte un senso al fine di rendere stimolante e non ovvia la partita.

Supponiamo ad esempio di variare il numero di punti iniziali; come già accennato all’aumento del numero le partite saranno più complesse e prevedranno un numero maggiore di possibili mosse. Nell’analisi del gioco partiremmo dai casi più semplici: 1, 2, o 3 punti.

Supponiamo che non si debba aggiungere un nuovo punto sulla linea tracciata, ma si debbano lasciare alterate tutte le altre regole, in questo caso il numero di mosse possibili si riduce drasticamente, infatti si può vedere come il numero di linee da tracciare e quindi di mosse sia uguale al triplo del numero di punti iniziali (da ogni punto possono uscire al più tre linee), diviso 2, dato che ogni linea congiunge al più due punti.

Sia n il numero di punti iniziali. Il valore 3n/2 non è sempre intero e si mostra che il numero di mosse è la parte intera di 3n/2, che sarà indicata con il simbolo [3n/2]. Questa generalizzazione con il linguaggio letterale potrà essere approfondita maggiormente alla scuola media.

Vediamo i seguenti esempi:

n = 1 n = 2 n = 3

mosse = [3/2] = 1 mosse = [6/2] =3 mosse = [9/2] = 4

Conoscendo a priori il numero di mosse del gioco è dunque possibile prevedere chi tra il primo e il secondo giocatore vince a prescindere dal tipo di giocata effettuata.

Supponiamo ora che siano confermate tutte le regole tranne quella per cui da ogni punto possono uscire solo tre linee. Supponiamo dunque che non ci sia questo vincolo. Evidentemente il gioco diventerebbe infinito.

Ad esempio per n = 2

Supponiamo ora di modificare solo l’ultima regola, per cui diventa possibile intrecciare le linee. Anche in questo caso il numero di mosse possibili diventa fisso a prescindere dalle strategie adottate dai giocatori. Infatti con un po’ di esperienza in questo gioco si intuisce che una possibile strategia da adottare (a seconda che sia il primo o il secondo giocatore) è quella di “ingabbiare” uno o più punti in modo che l’avversario non possa collegarli senza trasgredire a quest’ultima regola.

**Quarta fase** (discussione a grande gruppo e analisi di alcuni semplici casi)

Dopo aver condotto alcune partite il docente chiede agli allievi di raccontare ed esprimere quali mosse secondo ciascuna coppia di allievi sono state particolarmente interessanti e perché. Questo comporta una maggiore riflessione critica sul proprio operato: ciascuna mossa deve essere dettata da una giustificazione. Questo è anche il momento di far esprimere eventuali scoperte o strategie adottate.

Per capire meglio le possibili strategie da adottare si consiglia di partire dai casi più semplici, per poi arrivare con le classi di studenti più grandi a generalizzare le scoperte.

Ad esempio si parta da n = 1; il gioco a un punto è naturalmente il più banale, ma si presta ad alcune considerazioni topologiche utili per arrivare successivamente alla costruzione di possibili strategie di gioco con più punti.

L’unica mossa che può fare il primo giocatore è “un cappio” dato che c’è solo un punto iniziale

Il secondo giocatore ha due possibili mosse, e con entrambe vince la partita in quanto lascia l’avversario senza possibilità di continuare.

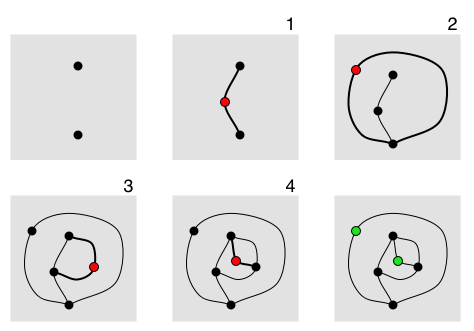
Le due mosse sono equivalenti dal punto di vista della strategia del gioco e della configurazione finale che ne deriva, infatti in entrambi i casi si ottengono 2 punti con tre linee uscenti e 1 punto con due linee uscenti. Non esiste una strategia generale dei *Germogli*, ma l’analisi topologica del gioco può portare a scoprire strategie vincenti, suggerendo al giocatore quali curve chiuse o aperte sia meglio tracciare per bloccare l’avversario.

Osserviamo che nel caso n = 1, il numero di mosse (m) è 2.

Vediamo il caso n = 2.

Questa è una possibile partita che finisce con la vittoria del primo giocatore in 5 mosse.

La seguente è una possibile giocata che permette la vittoria del secondo giocatore in 4 mosse. Si osserva che il primo giocatore non ha più mosse perché i due punti rimasti con meno di 3 linee non sono collegabili se non intrecciando una linea già esistente. In altre parole il secondo giocatore è riuscito a “ingabbiare” un punto.



Già in questo caso è possibile capire qual è il numero minimo e il numero massimo di mosse e quindi comprendere quando e in che modo può vincere il primo giocatore e quando il secondo.

In ogni caso si fa presto esperienza del fatto che il gioco termina in ogni caso in un numero finito di mosse, anche se non è evidente dalle regole dei Germogli, poiché il numero di punti aumenta ad ogni mossa. L'approccio corretto consiste nel considerare il numero di vite (opportunità per collegare una linea) anziché il numero di punti.

Partendo da 2 punti si hanno 6 vite, ossia 3 vite per ogni punto. Ad ogni mossa (qualsiasi essa sia) si perdono due vite (una linea collega due punti distinti o coincidenti), ma se ne aggiunge una, in quanto inserire un nuovo punto sulla linea comporta l’aggiunta di una vita (non 3 perché il punto ha già due linee uscenti).

Dunque potremmo scrivere:

6 -2+1 -2+1 -2+1 -2+1 -2+1. Arrivati a 1 non si possono più fare mosse.

Se si arriva esattamente a 1 (il primo esempio) si sono fatte 5 mosse e vince il secondo giocatore.

Se si arriva esattamente a 2 (il secondo esempio), significa che i due punti non sono collegabili, si sono fatte 4 mosse e vince il primo giocatore.

Per generalizzare questo risultato e soprattutto per capire il minimo numero di mosse si consiglia di attendere livelli di scuola più avanzati, per un’analisi più approfondita.

Potrebbe invece essere interessante già a questo livello procedere con due riflessioni sempre nel caso n=2.

- Quante e quali sono tutte le possibili mosse che si possono fare? Ci sono configurazioni equivalenti?

- Costruire configurazioni di gioco a partire da un dato numero di mosse.

**COME LAVORARE IN CLASSE IN UN TERZO CICLO**

**CLASSI DI RIFERIMENTO**

Il gioco può essere proposto a classi di studenti dai 10 ai 14 anni, con obiettivi specifici diversi. In generale Germogli coinvolge molto anche un pubblico adulto quindi anche allievi più grandi.

**TRAGUARDI DI APPRENDIMENTO**

Attraverso questo gioco, l’allievo è stimolato a:

- costruire ragionamenti, fondandosi su ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri; esprime e testa congetture dedotte da situazioni reali o astratte;

- sostenere le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accettare di cambiare opinione riconoscendo la logica e la correttezza di un’argomentazione altrui;

**DISCIPLINE COINVOLTE**

Matematica

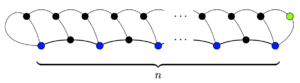
**ATTIVITA’**

In aggiunta a quanto già esplicitato in precedenza, con le classi della scuola media è interessante approfondire alcuni aspetti legati alla generalizzazione a n punti.

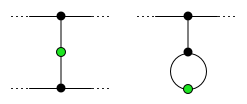
Ad esempio è interessante formalizzare il numero minimo e massimo di mosse a dipendenza del numero di punti da cui si inizia a giocare.

Come abbiamo già visto in precedenza, ogni punto inizia con tre vite e ogni mossa riduce il numero totale di vite nel gioco di uno (due vite sono perse all'estremità della linea, ma il nuovo punto ha una vita). Quindi alla fine di ogni turno ci sono3n-m vite rimanenti (dove m è il numero di mosse). Ogni punto sopravvissuto ha una sola vita (altrimenti ci sarebbe un'altra mossa che permetterebbe di unire quel punto ad altri), quindi ci sono esattamente 3n-m sopravvissuti. Ci deve essere almeno un sopravvissuto, e questo comporterà la mossa finale. Quindi 3n-m ≥ 1, da cui si deduce m 3n-1; un gioco può durare non più di 3n-1 mosse.

Questo massimo può essere raggiunto in molti modi assicurandosi che ci sia un solo sopravvissuto alla fine del gioco. Ad esempio, la seguente partita ha un sopravvissuto e 3n-1 mosse.



Per trovare il numero minimo di mosse osserviamo che alla fine del gioco ogni punto sopravvissuto ha esattamente due “vicini” morti, dato che se non fosse così ci sarebbe un’altra possibile mossa. Due punti sono vicini quando si ha uno dei seguenti casi (punti verdi vivi, punti neri “vicini” morti):



Nessun punto morto può essere il vicino di due diversi sopravvissuti, perché altrimenti ci sarebbe una mossa che permetterebbe di unire i due sopravvissuti. Tutti gli altri punti morti (non i vicini di un sopravvissuto) sono chiamati punti separati. Supponiamo che ci siano p punti separati. Allora



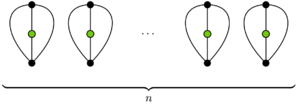
ossia, i punti totali alla fine di una partita sono *n*+*m* (ad ogni mossa si aggiunge un punto), ma possono essere contati anche come la somma dei punti sopravvissuti (3*n-m*), più tutti i loro vicini (due per ogni sopravvissuto, quindi 2(3*n-m*)), più i punti che non sono né sopravvissuti né loro vicini ossia i punti separati, *p*).

sviluppando questa equazione con incognita *m*  si trova che



Dunque una partita dura almeno 2n mosse (essendo p0) e il numero di punti separati è divisibile per 4, essendo *m* necessariamente un numero intero.

Il seguente diagramma mostra una partita completata di 2n mosse. Ha n sopravvissuti, 2n vicini di casa e 0 punti separati.



Nel caso n=3 possiamo mostrare quanto visto in generale.

Il numero di mosse varia tra un minimo di 6 ad un massimo di 8.

Nel caso in cui m = 6 oppure m = 8 vincerà il secondo giocatore, nel caso in cui m = 7 vincerà il primo giocatore.

A questo punto si può chiedere agli allievi di inventarsi alcune configurazioni di gioco per cui si ha o il primo o il secondo o il terzo caso.

**BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA**

https://en.wikipedia.org/wiki/Sprouts\_(game)

Applegate, D., Jacobson, G., Sleator, D. (1991). *Computer Analysis of Sprouts*, Carnegie Mellon University Computer Science technical report CMU-CS-91-144.